ψ^* 2016 : TD des 17 et 19 octobre (semaine 7)

Courbes paramétrées

1. Soit C la courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $(\mathbb{R}, F)$ où :
$$F : t \to \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ h(t) \end{bmatrix}$$
h est une fonction C^2 telle que h' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   a. Dans cette question uniquement on prend $h = \sinh$.
   Calculer la longueur de l'arc d'extrémités $A = F(0)$, $B = F(b)$.
   b. La **courbure** au point $M = F(t)$ est :
$$\gamma = \frac{\|F'(t) \wedge F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3}$$
   La calculer en tout point de C.
   c. Trouver un paramétrage de la courbe Γ tracée sur le plan xOy par la tangente à M quand M décrit C .
   d. Trouver toutes les fonctions h pour lesquelles Γ est un cercle de centre O .
   e. Quelles sont alors les limites de la courbure quand $t \to \pm\infty$?
   Quelle est l'allure de la courbe C ?

2. C est la courbe paramétrée par $(\mathbb{R}, F)$ où :
$$F : t \to \begin{bmatrix} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$
   a. L'étudier et la tracer.
   b. Calculer l'aire de la boucle.

3. C est la courbe paramétrée par $(\mathbb{R}, F)$ où $F : t \mapsto \begin{bmatrix} x = 3 - 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{bmatrix}$
   a. Déterminer l'intervalle d'étude minimal J, et les transformations à faire subir à $C' = F(J)$ pour obtenir C.
   b. Déterminer les points stationnaires de C', et faire l'étude en ces points.
   c. En tout point régulier de C', calculer $d(t) = \mathrm{Det}(F'(t), F''(t))$ et trouver son signe.
   d. Tracer C' puis C sans faire d'étude supplémentaire.
   e. Calculer la longueur totale de C.
   a. Trouver un paramétrage (I, F) du cercle C de centre $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et de rayon 1.
   b. Calculer les coordonnées du point P projection orthogonale de O sur la tangente à C au point $F(t)$.
   c. Quand t décrit I, P décrit une courbe qu'on demande d'étudier et de tracer.