ψ^* 2016 : TD des 21 et 23 novembre (semaine 10)

Eléments propres, diagonalisation

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = i$.
   a. Trouver son spectre, sans calculer de déterminant.
   b. Trouver une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.
   c. Construire D diagonale et P inversible à coefficients réels, telles que $A = PDP^{-1}$.

2. $E = \mathbb{R}_n[X]$, a, b réels distincts, u défini par :
$$u(P) = (X-a)(nP - (X-b)P')$$
   a. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres, sans utiliser de représentation matricielle.
   c. Existe-t-il une base de E constituée de vecteurs propres ? Si oui, quelle est la matrice de u dans cette base ?

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de taille n .

   On a déjà obtenu au TD 9 que :
$$\forall \theta \in]0, \pi[\ , \ \det(A + 2\cos\theta . I) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$
   a. En déduire le spectre de A.
   b. A est-elle diagonalisable ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?
   c. Pour chaque valeur propre λ, montrer que :
$$X \in E_\lambda \Leftrightarrow \forall i \in [0..n-1] \, , \ x_{i+2} - \lambda x_{i+1} + x_i = 0$$
   à condition de définir correctement x_0 et x_{n+1} .
   d. En déduire une base de E_λ .
   e. Diagonaliser A, c'est à dire donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

4. $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, u défini par $u(f) : x \mapsto \int_0^1 \max(x,t) f(t) dt$
   a. Vérifier que $u \in L(E)$.
   b. Montrer que chaque $u(f)$ est C^1 et calculer sa dérivée ; puis montrer que $u(f)$ est C

ERROR: syntaxerror
OFFENDING COMMAND: --nostringval--

STACK:

34
7108
1