ψ^* 2017 : TD des 27 et 29 novembre (semaine 11)

Réduction des endomorphismes ou matrices carrées

1. Soit $A \in M_3(\mathbb{Z})$ vérifiant : $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = I$.
   Montrer que $A^{12} = I$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$

   a. Etudier la diagonalisabilité/trigonalisabilité de A sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.
      NB : il est inutile de calculer χ_A .
   b. Diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.
   c. Montrer que A est diagonalisable par blocs sur $\mathbb{R}$, c'est à dire semblable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs de taille 2 à préciser.
      Indication: il suffit de permuter les vecteurs de la base canonique.

3. $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   a. Montrer que A n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$, mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b. Trouver une trigonalisation de A où un seul des coefficients surdiagonaux de A est non nul et vaut 1.
   c. Calculer A^k sous forme d'un produit de 3 matrices.

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2a \end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$, et de taille $n \geq 3$.

   a. Déterminer son polynôme caractéristique, puis son spectre.
   b. Calculer les dimensions des sous-espaces propres de A ; à quelle CNS sur a est-elle diagonalisable ?
   c. Diagonaliser A quand c'est possible.
   d. Dans les autres cas, trigonaliser A.

5. E ev de dimension finie, $u \in L(E)$, $v \in L(E)$.
   On suppose que u et v sont tous deux diagonalisables et commutent.
   Montrer qu'il existe une base de E qui les diagonalise simultanément.