ψ^* 2017 : TD des 8 et 10 janvier (semaine 15)

Intégration généralisée

1. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$, $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.
   a. Justifier la convergence de A et B.
   b. Trouver deux relations indépendantes entre A et B, et en déduire leur valeur.

2. Justifier la convergence de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$, puis la calculer.

3. Idem avec $D = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\tfrac{1}{t} - \operatorname{arg\,sinh} \tfrac{1}{t}\right)\, dt$.
   On rappelle que $\operatorname{arg\,sinh} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

4. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\, dt$.

5. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$
   a. Domaine de définition (ensemble des x pour lesquels l'intégrale est convergente).
   b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$ à l'aide d'un développement en série.
   c. Faire de même avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$.
   d. En déduire $F(x)$ comme somme d'une famille indexée par $\mathbb{Z}$.

6. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt$
   a. Justifier son existence.
   b. La calculer par développement en série.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} e^t dt$ (ce sont les coefficients de Fourier de exp).
   d. On admet le théorème de Parseval : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t\right)^2 dt$.
   En déduire la valeur de A.