

# $\psi^*$ 2016 : TD des 27 et 29 mars (semaine 24)

## Variables aléatoires

### 1. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ .

Un point, initialement en  $(0, 0)$ , se déplace par sauts successifs de longueur 1 dans chacune des 4 directions équiprobables. On note  $Z_n = (X_n, Y_n)$  sa position après  $n$  sauts.

a.  $X_n$  et  $Y_n$  sont-elles indépendantes ?

b. Sans calculer la loi de  $X_n$ , calculer son espérance et sa variance.

c. Calculer l'espérance de  $\|Z_n\|_2^2$ , et majorer l'espérance de  $\|Z_n\|_2$ .

d. Calculer la probabilité que  $Z_n = (0, 0)$  (retour à l'origine).

Le résultat fait intervenir une somme de carrés de coefficients binomiaux.

e. Calculer de deux manières le DSE de  $(1+x)^n(1+x)^m$  et en déduire une formule explicite pour  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$  (formule de VDM).

f. En déduire une formule explicite pour  $P(Z_{2p} = (0, 0))$ , et un équivalent quand  $p \rightarrow \infty$ .

## SDL1

### 1. Résoudre, sur un intervalle maximal à préciser, le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + y + z + id \\ y' = -2x - 2y - z \\ z' = 2x + 3y + 2z \end{cases} \quad \text{où } id \text{ est l'identité}$$

Indication : il existe une solution où  $x, y, z$  sont affines.

## EDL2

### 1. $E : x^2 y'' - 4xy' + (6 + x^2)y = x^4 \cos x$ ( $x$ est la variable, $y$ est l'expression de la fonction inconnue, à valeurs réelles).

a. Déterminer les intervalles où le théorème structural s'applique. Sur ces intervalles, justifier le changement de fonction  $z = x^{-2}y$ .

b. L'utiliser pour résoudre  $E$  sur les intervalles en question.

c. Trouver l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$ , préciser sa structure algébrique et sa dimension.

d. Trouver les solutions sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy  $(E, f(0) = f'(0) = 0)$ .