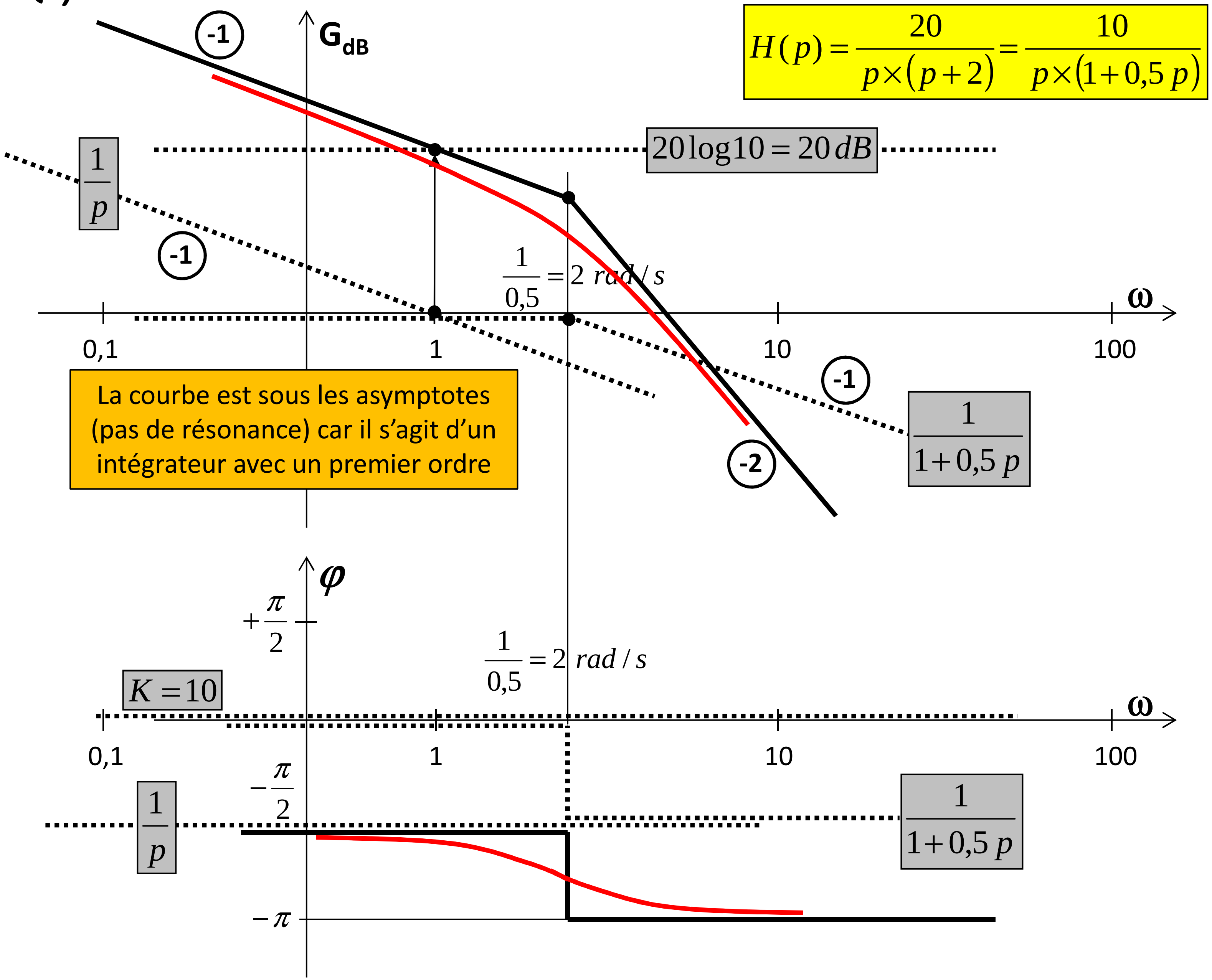
Q1 **et** ***Q2)***


$H(p) = \frac{20}{p \times (p+2)} = \frac{10}{p \times (1+0,5\,p)}$
G_{dB}
-1
$20 \log 10 = 20\,dB$
$\frac{1}{p}$
-1
$\frac{1}{0,5} = 2\ rad/s$
ω
0,1
1
10
100
-1
$\frac{1}{1+0,5\,p}$
-2
La courbe est sous les asymptotes (pas de résonance) car il s'agit d'un intégrateur avec un premier ordre
φ
$+\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{0,5} = 2\ rad/s$
$K = 10$
ω
0,1
1
10
100
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{p}$
$\frac{1}{1+0,5\,p}$
$-\pi$

Q3) Calculons la valeur du gain pour l'intégrateur : $20\ log\left|\dfrac{1}{j\,\omega}\right|$

A la pulsation de cassure ***ω = 2 rad/s*** on a alors :

$$20\ log\left|\frac{1}{j\times 2}\right| = -20\ log\left|2\ j\right| = -20\ log\sqrt{0^2+2^2} = -20\ log(2) = -6\ dB$$

Prenons en compte le gain du gain (toujours à ***+20 dB***) et celui du premier ordre qui est nul pour la pulsation de cassure.

$$\Rightarrow\ G_1 = -6\ dB + 20\ dB + 0\ dB \ \Rightarrow\ \boxed{G_1 = +14\ dB}$$

Q4) On sait qu'à la cassure la courbe d'un premier ordre est ***3 dB*** sous les asymptotes.

$$\Rightarrow\ \boxed{G_2 = +11\ dB}$$

Par calcul on a : $20\ log\left|\dfrac{20}{j\,\omega(j\,\omega+2)}\right| = 20\ log\left|\dfrac{20}{j\times 2(j\times 2+2)}\right| = 20\ log(20) - 20\ log\left|-4+4\ j\right|$

$$\Rightarrow\ G_2 = 20\ log(20) - 20\ log\sqrt{4^2+4^2} = 20\ log(20) - 20\ log\sqrt{32}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{G_2 = +11\ dB}$$

Q5) On doit faire le calcul suivant : $20\log\left|FT(j\omega)\right| = 0\,dB$ $\Rightarrow$ $20\log\left|\dfrac{20}{j\omega(j\omega+2)}\right| = 0\,dB$

$$\Rightarrow \left|\frac{20}{j\omega(j\omega+2)}\right| = 1 \Rightarrow \left|-\omega^2 + 2j\omega\right| = 20 \Rightarrow \sqrt{\left(-\omega^2\right)^2 + (2\omega)^2} = 20$$

$$\Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 = 20^2 = 400 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 400 = 0$$

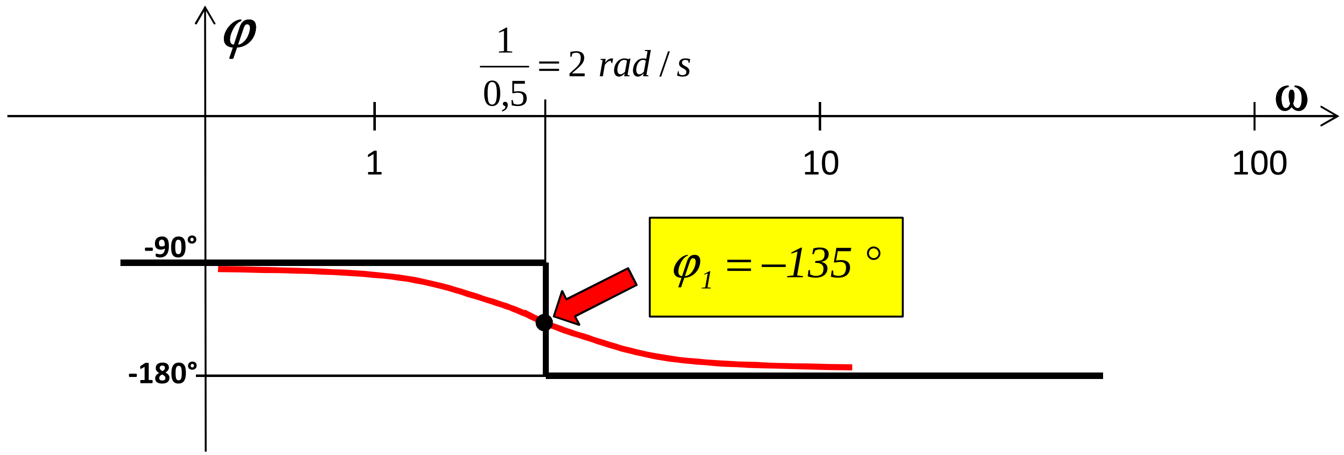
Faisons le changement de variable ***X = ω²*** : $X^2 + 4X - 400 = 0$

$$\Delta = "b^2 - 4ac" = 4^2 - 4\times1\times(-400) = 1616 \Rightarrow X = "\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}" = \frac{-4\pm\sqrt{1616}}{2\times1}$$

La solution cherchée est forcément positive : $X = \dfrac{-4+\sqrt{1616}}{2\times1} = 18{,}1$

D'où : $\omega = \pm\sqrt{18{,}1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_c = 4{,}25\ rad/s}$

Q6) Par symétrie de la courbe des phases on a ***-135°*** à la cassure des asymptotes.

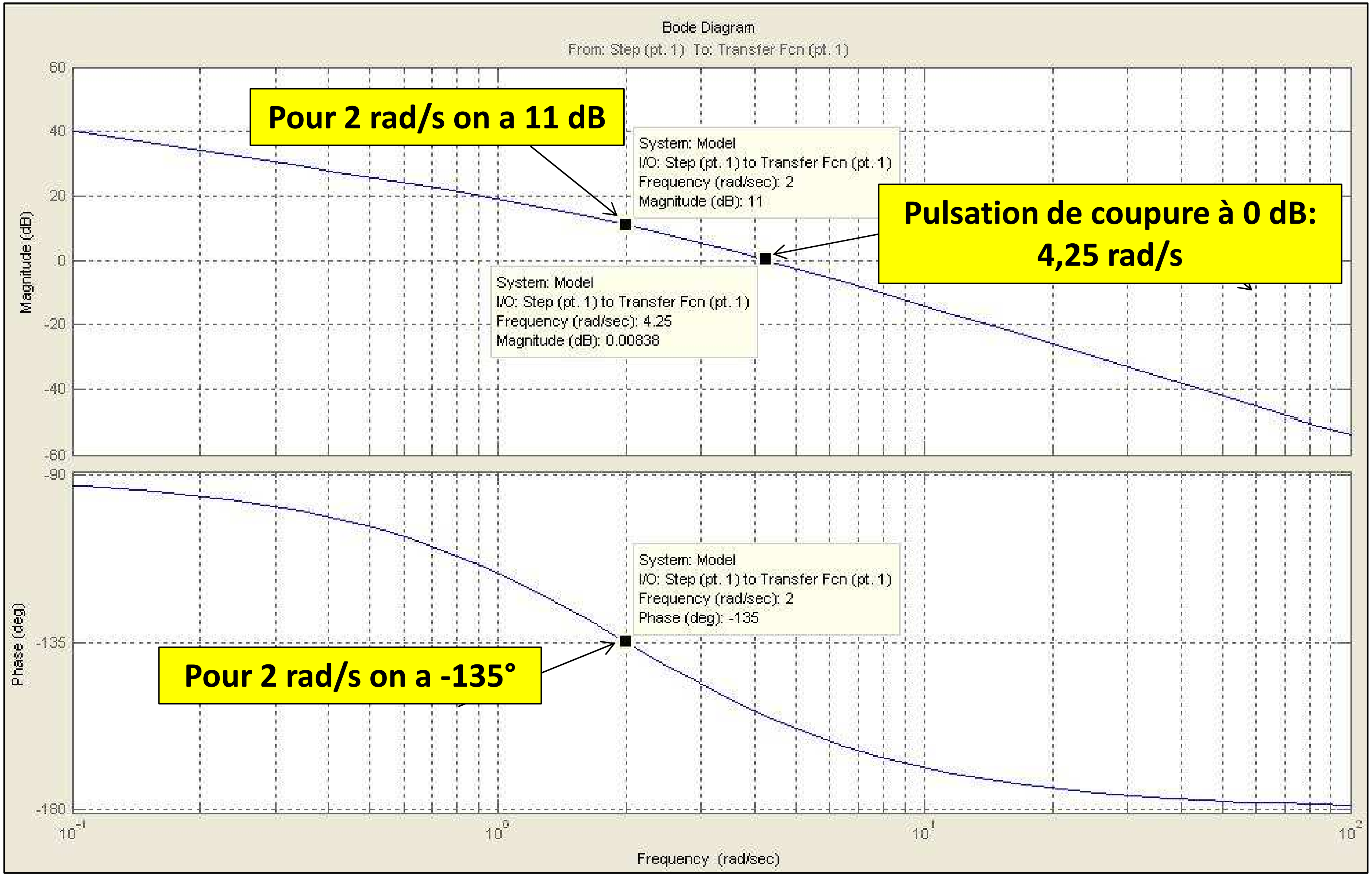


Par calcul : $Arg\left(\frac{20}{j\omega(j\omega+2)}\right) = \cancel{Arg(20)} - Arg\left(-\omega^2 + 2j\omega\right) \Rightarrow \varphi_1 = -Arc\tan\left(\frac{2\omega}{-\omega^2}\right)$

Pour ***ω = 2 rad/s*** on a : $\varphi_1 = +Arc\tan\left(\frac{2\times 2}{2^2}\right) = Arc\tan(1) = +45°$

La réponse « *mathématique* » étant à $k\pi$ près on a en fait : $\boxed{\varphi_1 = -135\ °}$

En utilisant le logiciel ***Matlab*** on obtient les résultats suivants :



Correction Bode 1