TUYAUX SONORES (E3a PSI - extrait)

Le fluide est supposé parfait, son mouvement est décrit sans prendre en compte les effets de viscosité et les échanges thermiques à l'intérieur du fluide. Les détentes et compressions locales du fluide sont isentropiques ; V(P) étant le volume du fluide et P sa pression, le coefficient de compressibilité isentropique, constant pour le fluide, s'écrit :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S .$$

Les effets de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Un tuyau cylindrique horizontal infini de section S_0 constante et d'axe x'x contient un fluide parfait compressible qui, au repos, possède une masse volumique μ_0 et se trouve à la pression P_0 et à la température T_0. Ces grandeurs sont uniformes dans l'espace.

L'équilibre est perturbé par le passage d'une onde acoustique plane qui se propage dans le cylindre suivant la direction Ox. La perturbation unidirectionnelle ne dépend ainsi que de l'abscisse x le long du « tuyau sonore » et du temps t. Dans le milieu perturbé, u(x,t) représente le déplacement à l'instant t du fluide situé au repos à l'abscisse x.

L'onde plane progressive acoustique se déplace dans le sens des x croissants au sein d'une conduite de section constante S_0. Le déplacement est de la forme : $u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{C}\right)$.

➢ *L'impédance caractéristique Z du fluide où se propage l'onde, est définie par le rapport pression acoustique / vitesse acoustique suivant :* $Z = \frac{p(x,t)}{v(x,t)}$.

1. Calculer Z_{air} dans le cas de l'air à 20°C.

2. Comparer, sans préciser les valeurs numériques, les impédances caractéristiques d'un gaz, d'un liquide et d'un solide.

➢ *L'impédance acoustique Z_a de la conduite est définie par le rapport de la pression acoustique sur le débit volumique du fluide. Indiquer comment elle s'écrit pour un tuyau de section constante S_0.*

3. Justifier à l'aide d'une analogie électrocinétique ce terme « impédance » adopté pour caractériser la propagation du son dans la conduite. Donner l'expression de l'impédance acoustique Z_a d'un tuyau sonore cylindrique, en fonction de sa section S_0, de la masse volumique μ_o du fluide qu'il contient et de la vitesse C du son dans le fluide.

4. Une onde sonore de fréquence 1 kHz se propage dans l'air. Le tableau suivant donne, au seuil de perception et au seuil de douleur, les ordres de grandeur des intensités I_{dB} en décibel, ainsi que les pression, vitesse et amplitude maximales des vibrations notées respectivement P_m, V_m et U_m :

	I (en W.m^{-2})	I (en dB)	P_m (en Pa)	V_m (en m.s^{-1})	U_m (en m)
seuil de perception	10^{-12}	0	3.10^{-5}	$0,7.10^{-7}$	10^{-11}
seuil de douleur	1	120	30	$0,7.10^{-1}$	10^{-5}

Commenter ce tableau.

5. Quelle est, en décibels, l'intensité sonore résultant de la superposition de deux ondes sonores émises par deux sources indépendantes d'intensité 60 dB ?

TUYAU SONORE : INFLUENCES DES FLUIDES ET D'UN RACCORDEMENT

Une conduite est constituée de deux tubes cylindriques de sections respectives S_1 et S_2, de même axe x'x et séparés par le plan $x = 0$. Deux fluides non miscibles se répartissent de part et d'autre de ce plan (figure 2).

- $x < 0$ *: le fluide* **1** *est de masse volumique* μ_1 *; le son s'y propage à la célérité* C_1 *;*
- $x > 0$ *: le fluide* **2** *est de masse volumique* μ_2 *; le son s'y propage à la célérité* C_2*.*

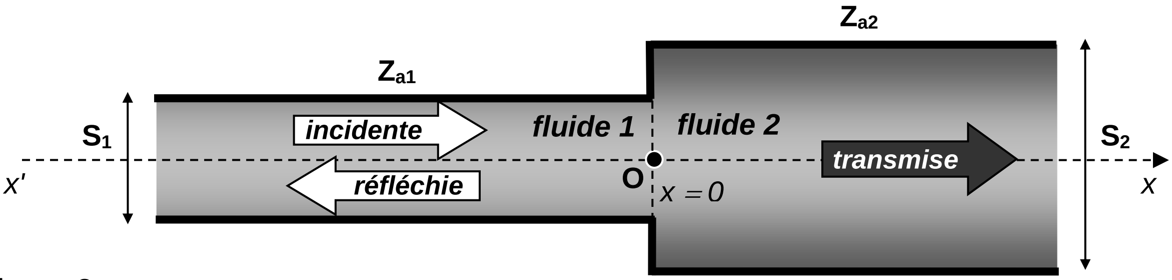


Figure 2

Les impédances acoustiques Z_{a1} et Z_{a2} des tubes de sections respectives S_1 et S_2 sont liées aux impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 des milieux par les relations :

$$Z_{a1} = \frac{\mu_1 C_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1} \quad \text{pour } x < 0 \qquad Z_{a2} = \frac{\mu_2 C_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{avec } \alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}.$$

Une onde de pression plane progressive harmonique incidente $p_i(x,t)$ se propage dans le milieu **1** *selon le sens des x croissants. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement donne naissance en $x = 0$ à :*

- *une onde de pression transmise dans le milieu* **2**, $p_t(0,t)$ *dont la puissance est* P_t *,*
- *une onde de pression réfléchie dans le milieu* **1**, $p_r(0,t)$ *dont la puissance est* P_r *.*

Les pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie s'expriment par :

$$p_i(x,t) = P_{im} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C_1}\right)\right] \qquad p_t(x,t) = P_{tm} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C_2}\right)\right] \qquad p_r(x,t) = P_{rm} \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{C_1}\right)\right]$$

La puissance moyenne $\langle P_i \rangle$ est associée à l'onde incidente. Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis par les valeurs absolues des rapports des puissances moyennes transportées :

$$R = \left|\frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle}\right| \quad \text{et} \quad T = \left|\frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle}\right|.$$

6. On indique que les conditions de passage de l'onde à l'interface des deux fluides correspondent à la continuité de la pression et du débit volumique. En déduire deux équations reliant P_{im}, P_{rm}, P_{tm} et α.

7. Déterminer, en fonction de α, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression : $r_P = \frac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$ et $t_P = \frac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$.

8. Exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à travers l'interface en fonction du seul coefficient α.

Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Que traduit-elle ?

On rappelle que la puissance surfacique moyenne transférée par l'onde peut se calculer par la relation : $\frac{1}{2}\mathcal{Re}(\underline{p}.\underline{v}^*)$

Influence des deux milieux pour une conduite de section constante : $S_1 = S_2 = S_0$

La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est liée à la différence de nature entre les deux fluides.

9. Le milieu **2** est l'air, d'impédance caractéristique Z_{air2} et le milieu **1** l'intérieur du corps humain dont les constituants correspondent à une impédance caractéristique $Z_{corps1} << Z_{air2}$. Evaluer r_P et t_P, puis T et R. Commenter.
Calculer l'atténuation en décibel $T_{dB} = 10\log(T)$, correspondant au coefficient de transmission $T = 1{,}7.10^{-3}$. Pourquoi le médecin utilise-t-il un stéthoscope pour écouter les battements cardiaques ou les murmures respiratoires ?

Influence du raccordement des deux conduites pour un fluide unique : $\alpha = S_2/S_1$

Un fluide de masse volumique au repos μ_0 dans lequel le son se propage à la célérité C occupe la conduite constituée des deux tubes de sections différentes S_1 et S_2. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est représentée par le changement de section.

10. Tracer l'allure de la fonction $R(\alpha)$. Pour quelle valeur de α, y a-t-il adaptation de l'impédance ? Commenter les cas limites : $S_1 << S_2$ *et* $S_1 >> S_2$.

PAVILLON EXPONENTIEL ET ADAPTATION DE L'IMPÉDANCE

Un pavillon acoustique rigide de longueur L, d'axe de révolution Ox et de section circulaire S(x) (figure 3) contient un fluide au repos de pression P_0, de masse volumique μ_0 et de coefficient de compressibilité isentropique χ_S constant. Les effets de pesanteur sont négligés.

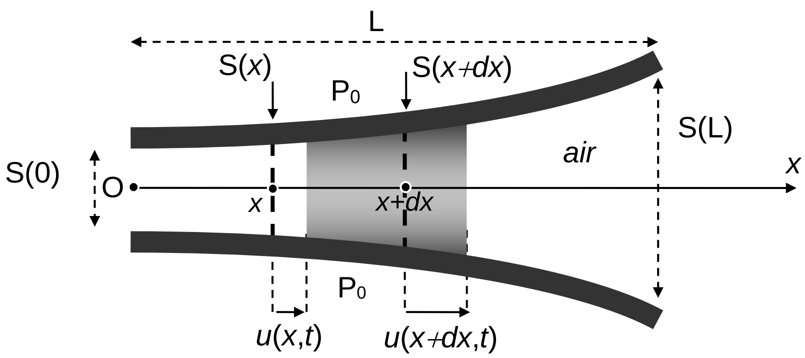


Figure 3

L'équilibre est perturbé par une onde sonore de faible amplitude qui se propage dans le pavillon suivant Ox. Elle est caractérisée par le déplacement longitudinal u(x,t) du fluide situé au repos à l'abscisse x, par la pression acoustique p(x,t) et par la vitesse acoustique $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\vec{e}_x$ dont la composante radiale est négligée. L'équation d'Euler les relie par l'équation différentielle : $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$.

Le champ de pression dans le fluide dépend du temps et de l'espace par la relation :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \qquad |p(x,t)| << P_0$$

11. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume S(x)dx de la tranche de fluide entre l'état de repos et l'état de mouvement. En déduire la surpression correspondante $p(x,t)$ en fonction de χ_S, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{d\ln S(x)}{dx}$.

12. Démontrer l'expression de l'équation d'onde à laquelle obéit $p(x,t)$ dans le pavillon :

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d\ln S(x)}{dx}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi : $S(x) = S(0)\,e^{x/a}$, avec $a > 0$.

13. Sachant que l'onde sonore se propage à la célérité C, écrire l'équation de propagation précédente en fonction de C, a et de dérivées spatiales et temporelles de $p(x,t)$.

L'onde sonore est considérée plane progressive harmonique, de la forme :

$$\underline{p}(x,t) = P_m \exp\left[j\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right].$$

Le nombre d'onde $\underline{k}$ est, a priori, complexe : $\underline{k} = k' - j\,k''$, k' et k'' étant réels.

14. Mettre en évidence dans l'expression de $\underline{p}(x,t)$ les termes d'amortissement et de propagation.

15. Etablir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$, ω, a et C.

16. Montrer que le pavillon se comporte comme un filtre passe-haut ; préciser sa pulsation de coupure ω_C en fonction de a et C.

17. Exprimer la fréquence de coupure f_C en fonction de C, L, S(0) et S(L).

❖ *La fréquence de coupure du pavillon acoustique est $f_C = 150$ Hz.*

18. L'onde sonore progressive se propage suivant $x > 0$. Déterminer le réel k' en fonction de C, ω_C et ω, ainsi que le réel k'' en fonction uniquement de a.

19. Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface S(x) perpendiculaire à sa direction de propagation, en fonction de P_m, μ_0, C, S(0), ω et ω_C. Commenter.

On rappelle que la puissance surfacique moyenne transférée par l'onde peut se calculer par la relation : $\frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{p}.\underline{v}^*)$.

Le pavillon acoustique est intercalé dans le raccordement de deux conduites de sections S(0) et S(L) comme l'indique la figure 4 ci-dessous :

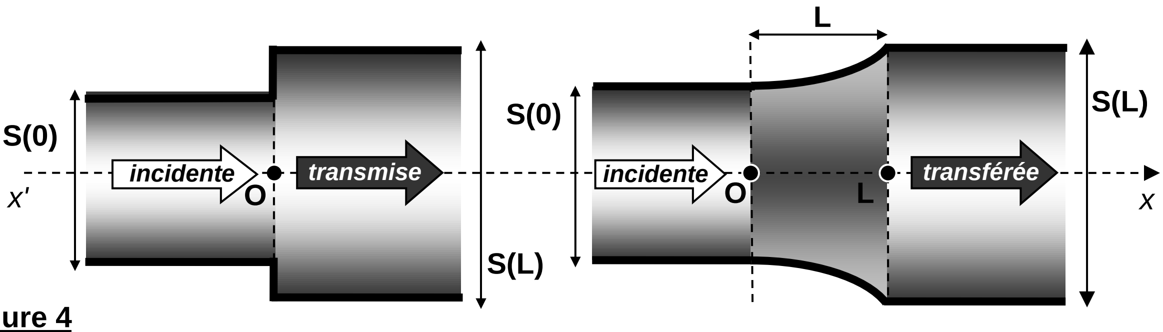


Figure 4

20. Déterminer, pour $\omega > 10\,\omega_C$, le coefficient de transmission $T_{pav} = \dfrac{\langle P_{\text{transférée}} \rangle}{\langle P_{\text{incidente}} \rangle}$ relatif aux puissances acoustiques incidente à l'entrée et transférée à la sortie du pavillon de longueur L. Que peut-on dire du rapport des intensités sonores transférée et incidente $\dfrac{I_{\text{transférée}}}{I_{\text{incidente}}}$? Commenter.

21. Comparer T_{pav} au coefficient de transmission en puissance T de la conduite en l'absence de pavillon en exprimant le rapport $\dfrac{T_{pav}}{T}$ en fonction de α. Préciser la valeur numérique de ce rapport pour $\alpha = 9$. Commenter en précisant le gain en décibel obtenu par le pavillon intercalé.

MODELE SIMPLIFIE D'UN SILENCIEUX D'ECHAPPEMENT

Le tuyau d'échappement d'une automobile est assimilé à une conduite cylindrique supposée infinie de section S_1 occupée par un gaz d'échappement de masse volumique μ_0 au repos. L'expulsion de ce gaz de combustion engendre des ondes sonores désagréables pour l'oreille humaine, il faut en diminuer l'intensité.

Un filtre acoustique cylindrique, ou silencieux d'échappement, de section S_2 ($S_2 > S_1$) et de longueur L, est intercalé dans la conduite (figure 5). Il est traversé par le gaz d'échappement.

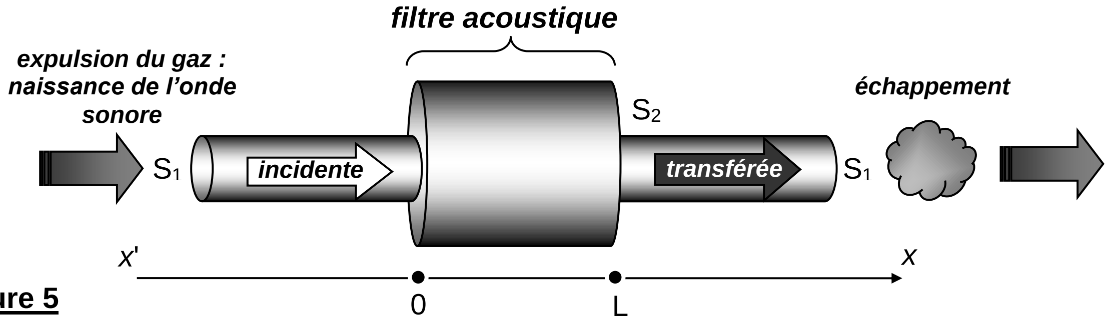


Figure 5

Le son se propage à la célérité $C = 460\ m.s^{-1}$ dans l'ensemble du dispositif à une température de 250°C.

Le bruit à assourdir est modélisé par une onde sonore incidente plane progressive harmonique de fréquence f caractérisée par la pression acoustique : $\underline{p}_i(x,t) = P_{im} \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$.

La pression acoustique $\underline{p}_t(x,t) = P_{tm} \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$ obtenue à la sortie du silencieux est la superposition d'une infinité d'ondes sonores transmises après réflexions successives dans le filtre acoustique en $x = L$ et $x = 0$.

Dans les trois domaines, le champ des pressions associé à l'onde est de la forme :

$$\underline{p}(x<0,t) = P_{im} \exp\left[j(\omega t - kx)\right] + P_{rm} \exp\left[j(\omega t + kx)\right]$$

$$\underline{p}(0<x<L,t) = P_m^L \exp\left[j(\omega t + kx)\right] + P_m^0 \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$$

$$\underline{p}(x>L,t) = P_{tm} \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$$

- *$P_{rm} \exp\left[j(\omega t + kx)\right]$ est la superposition d'une infinité d'ondes qui franchissent l'interface $x = 0$ dans le sens des x décroissants, à l'issue d'un nombre impair de réflexions aux interfaces du filtre ;*
- *$P_m^0 \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$ est la superposition d'une infinité d'ondes se déplaçant au sein du filtre dans le sens des x croissants, transmise à l'interface $x = 0$ ou après réflexions sur l'interface $x = 0$;*
- *$P_m^L \exp\left[j(\omega t + kx)\right]$ est la superposition d'une infinité d'ondes se déplaçant au sein du filtre dans le sens des x décroissants, après réflexions sur l'interface $x = L$.*

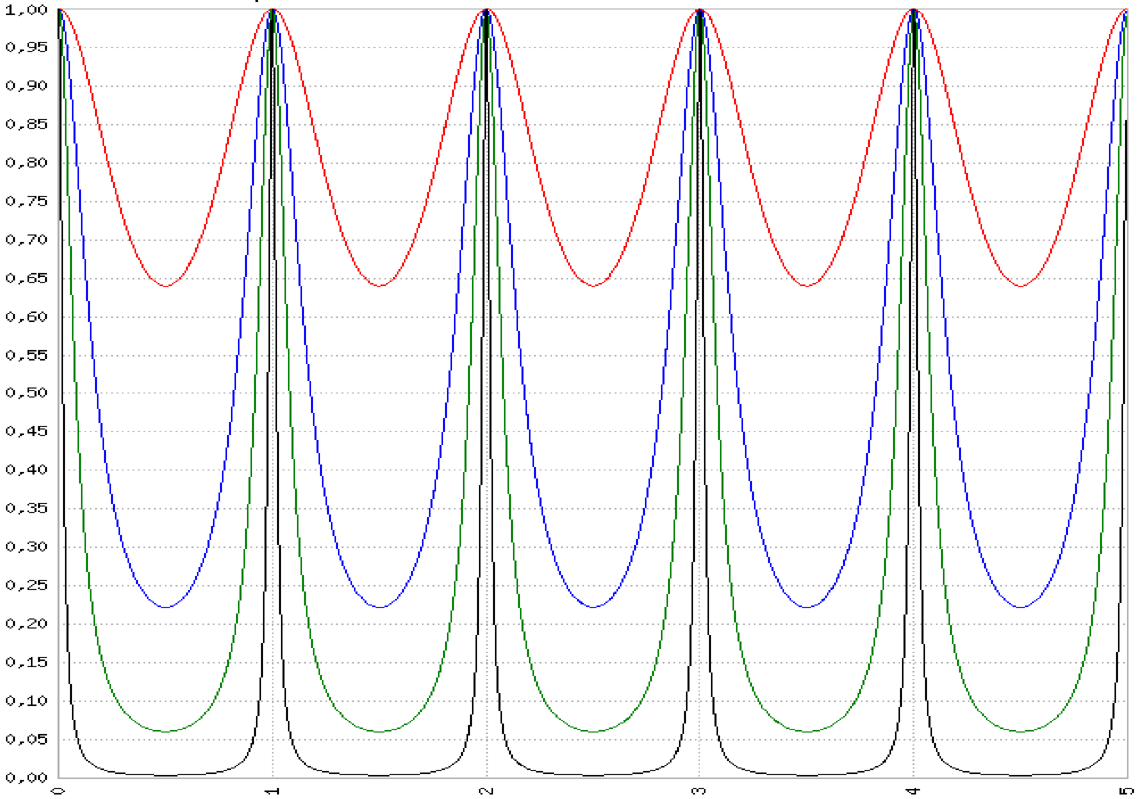
22. Donner les expressions correspondantes du champ des vitesses $\underline{v}(x,t)$ associé à l'onde dans les trois domaines : $\underline{v}(x<0,t)$, $\underline{v}(0<x<L,t)$ et $\underline{v}(x>L,t)$.

23. Ecrire les quatre relations de continuité permettant de relier P_{im}, P_{rm}, P_m^0, P_m^L et P_{tm} pour les deux changements de section.

24. Le coefficient complexe de transmission global $\underline{t}_P = \dfrac{P_{tm}}{P_{im}}$ en amplitude de pression s'écrit en fonction de S_1, S_2 et $\exp(-2jkL)$: $\underline{t}_P = \dfrac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2-(S_1-S_2)^2\exp(-2jkL)}$.

Le facteur de transmission en énergie $\mathcal{T} = \underline{t}_P \, \underline{t}_P^* = |\underline{t}_P|^2$ du filtre peut se mettre sous la forme : $\mathcal{T} = \dfrac{1}{1 + m\sin^2\left(\dfrac{\pi f}{f_0}\right)}$, avec m $=(\frac{S_2^2 - S_1^2}{2S_1S_2})^2$ et $f_0 = \frac{c}{2L}$.

On a tracé la fonction $\mathcal{T}(f/f_0)$ pour différentes valeurs de m ; trouvez les valeurs de m et de S_2/S_1 correspondantes et commenter les allures des courbes.



Préciser dans le cas $S_2 >> S_1$ la valeur du facteur de qualité Q du filtre défini pour un facteur de réduction du bruit $\mathcal{T} = \dfrac{\mathcal{T}_{max}}{2}$.

R : Dans le texte initial du problème de E3A, les calculs de $\underline{t}_P$, m, f_0 étaient demandés et les expressions non fournies…Vous pouvez faire un peu d'entraînement au calcul en les retrouvant !
De même les courbes $\mathcal{T}$(f) n'étaient pas fournies : entraînez-vous à les obtenir avec une machine graphique.

25. Quelle est la plus courte longueur L_m permettant de réduire au maximum le facteur $\mathcal{T}$ à une fréquence d'éjection des gaz de combustion de 200 Hz ?

26. L'intensité sonore, pour cette fréquence et à la sortie du moteur, est de 80 dB. Afin de ramener ce niveau à 60 dB, un silencieux de longueur L_m et de diamètre d_2 est placé au milieu du tuyau d'échappement de diamètre $d_1 = 4\,\text{cm}$. Quelle doit être la valeur numérique de son diamètre d_2 ?