Tuyaux sonores e3a PSI

1. $Z = \dfrac{p(x,t)}{v(x,t)}$; avec une onde progressive $p(t-\frac{x}{c})$ et $v(t-\frac{x}{c})$ on montre (cf. cours) que $Z = \mu_0 c$; ici avec $\mu_0 = 1{,}2\,kg\,m^{-3}$ et $c = 340\,m\,s^{-1}$

$\underline{Z = 410\ kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$.

2. $c_{gaz} < c_{liq} < c_{sol}$ et $\mu_{gaz} \ll \mu_{liq} < \mu_{sol}$ $\Big\}$ $\underline{Z_g \ll Z_{liq} < Z_{sol}}$.

3. $D_V = \iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{S}$ comme $I = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S}$

et $\Delta P = p_{acoustique}$ comme ΔV

et de même que $Z = \dfrac{\Delta V}{I}$, $Z_a = \dfrac{\Delta P}{D_V}$

Ainsi $\underline{Z_a = \dfrac{p}{D_V} = \dfrac{p}{v S_0} = \dfrac{Z}{S_0}} = \underline{\dfrac{\mu_0 c}{S_0}}$ $(x\nearrow)$

4. $P_m \ll P_0$; $V_m \ll c$; $u_m \ll \lambda$. Tous les commentaires sont dans le cours...

5. $I = I_1 + I_2$, les puissances surfaciques s'ajoutent (pas d'interférences)

avec $I_{1\,dB} = 60 = 10 \log \dfrac{I_1}{I_0}$

$I_{2\,dB} = 60 = 10 \log \dfrac{I_2}{I_0}$ $\Bigg\}$ $I_{dB} = 10 \log \dfrac{I_1 + I_2}{I_0}$ soit :

$\underline{I_{dB}} = 10 \log \dfrac{2 I_1}{I_0} = 10 \log \dfrac{I_1}{I_0} + 10 \log 2 = \underline{63\,dB}$.

6. $\begin{cases} P_i(0,t) + P_r(0,t) = P_t(0,t) \\ S_1\, v_i(0,t) + S_1\, v_r(0,t) = S_2\, v_t(0) \end{cases}$

D'où $\begin{cases} P_{i_m} + P_{r_m} = P_{t_m} \\ P_{i_m} - P_{r_m} = \alpha P_{t_m} \end{cases}$

7. $\underline{r_p = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}$; $\underline{t_p = \dfrac{2}{1+\alpha}}$.

8. $R = \dfrac{|\langle P_r \rangle|}{|\langle P_i \rangle|} = \left| \dfrac{\frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P_r} \cdot \underline{v_r}^*) S_1}{\frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P_i} \cdot \underline{v_i}^*) S_1} \right|$

$\underline{R} = \dfrac{|-Z_1| P_{r_m}^2 S_1}{Z_1 P_{i_m}^2 S_1} = \underline{\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}$.

$T = \dfrac{|\langle P_t \rangle|}{|\langle P_i \rangle|} = \dfrac{\frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P_t} \cdot \underline{v_t}^*) S_2}{\frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P_i} \cdot \underline{v_i}^*) S_1}$

$\underline{T} = \dfrac{Z_1 \cdot P_{t_m}^2}{Z_2 \cdot P_{i_m}^2} \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{P_{t_m}^2}{P_{i_m}^2} \dfrac{Z_{a_1}}{Z_{a_2}} = \underline{\dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}}$

On vérifie la conservation de l'énergie par $\underline{R + T = 1}$. Voir la fin du corrigé

9. $\alpha = \dfrac{Z_{a_1}}{Z_{a_2}} = \dfrac{Z_1}{Z_2} \ll 1$ donc $r_p = 1$ et $t_p = 2$

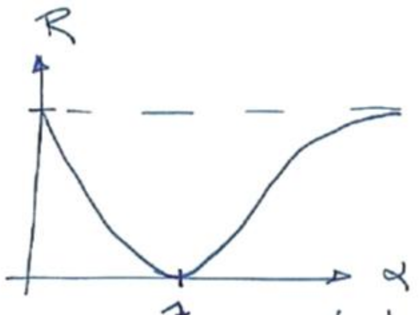
$T \longrightarrow 0$ et $R = 1$. Toute l'énergie est réfléchie : Tout son provenant de l'intérieur du corps ne peut être entendu à l'extérieur.

R : Ne pas se laisser abuser par la valeur $t_p = 2$ qui semble paradoxale : on montre que $t_v = 0$ ce qui correspond à ne pas avoir d'onde transmise.

$T_{dB} = -28\,dB$. Il n'y a effectivement pas de transmission.

Le stéthoscope sert d'adaptateur d'impédance.

10.



$S_1 \ll S_2$ ou $S_2 \ll S_1$: $R \to 0$

$S_1 = S_2$, $\alpha = 1$.

↳ adaptation $R = 0 \Rightarrow T = 1$.

11. * En se servant de la figure 3 :

$$\delta = \frac{1}{S(x)dx}\left\{ S(x+u(x,t))\left[dx + u(x+dx) - u(x)\right] - S(x)dx \right\}$$

En tenant compte de $u \ll x$:

$$\delta = \frac{1}{S(x)dx}\left[S(x) + \left(\frac{dS}{dx}\right)u(x,t)\right]\left[dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right] - 1$$

$$\delta = \frac{1}{S(x)}\frac{dS}{dx}\cdot u(x,t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$, en négligeant

$2\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)u$ % aux autres termes (2e ordre).

* Or $\chi_s = -\delta/p$ d'où

(1) $$p = -\frac{1}{\chi_s}\left[u(x,t)\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right].$$

12. D'autre part $\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0\frac{\partial v}{\partial t}$ (2)

Dérivons (1) % à t : $$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s}\left[v\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \quad (1')$$

car $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Ensuite on dérive (1') % à t et (2) % x

$$\partial^2 p/\partial t^2 = -\frac{1}{\chi_s}\left[\frac{d\ln S}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}\right]$$

car $\frac{1}{S}\,dS/dx = \frac{d\ln S}{dx}$

et $\partial^2 p/\partial x^2 = -\mu_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}$. Enfin on utilise $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial p}{\partial x}$ et Schwarz pour obtenir l'équation de l'énoncé.

13. Avec $\ln S = \frac{x}{a} + \ln S_0$,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\,\partial p/\partial x \quad (3)$$

(5)

14. $P_m \exp[j(\omega t - k'x)] \exp(-k''x)$.

- $k' > 0$, $x \nearrow$ et $k'' > 0$: amortissement
- $k' < 0$, $x \searrow$ et $k'' < 0$: amortissement.
- $v_\varphi = \omega / k'$ • $\delta = 1/k''$: distance caractéristique d'amortissement

15. On injecte $\underline{p}$ dans (3) et on obtient

$$\underline{k}^2 + j\frac{\underline{k}}{a} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

16. $\underline{k}^2 + \frac{j}{a}\underline{k} - \omega^2/c^2 = 0$; $\Delta = -\frac{1}{a^2} + 4\frac{\omega^2}{c^2}$.

1* Si $-\frac{1}{a^2} + 4\frac{\omega^2}{c^2} > 0$,

$\underline{k} = k' - jk''$ avec k' et k'' de m̂ signe (Q14)

il y a propagation. Calcul de $\underline{k}$ en 18. infra.

2* Si $-\frac{1}{a^2} + 4\frac{\omega^2}{c^2} < 0$, $\underline{k}$ est imaginaire

par : $\underline{k} = -j\left(\frac{1}{a} \pm \sqrt{-\Delta}\right)/2$, donc $k' = 0$

et il n'y a pas propagation.

Le pavillon est bien passe-haut avec $\omega_c = \frac{c}{2a}$.

17. $f_c = \frac{c}{4\pi a} = \frac{c}{4\pi L} \ln \frac{S(L)}{S(0)}$.

18. Avec 16. 1* : $\underline{k} = \dfrac{-j/a + \sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}{2}$

(6)

D'où $k'' = \frac{1}{2a}$ et $k' = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$.

R. : 1: $\delta = 2a$ ne dépend pas de ω.

2: Par contre $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$ est f° de ω, la propagation est dispersive.

19. 1* Il faut d'abord déterminer $\underline{v}$:

$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t}$ d'où $\underline{v} = -\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{1}{j\omega}(-j\underline{k}\,\underline{p})$

$\underline{v} = \frac{\underline{k}}{\omega\mu_0}\underline{p}$.

2* Ensuite on calcule $\frac{1}{2}\mathcal{R}_e(\underline{p}\,\underline{v}^*) . S(x)$

Avec les expressions des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}S(x)\mathcal{R}_e(\underline{p}\,\underline{v}^*) = \frac{1}{2}S(x)\mathcal{R}_e\left(P_m^2 \frac{\underline{k}^*}{\omega\mu_0} e^{-2k''x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega\mu_0} P_m^2 \underbrace{e^{-2k''x}S(x)}_{S_0} \underset{\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\underbrace{k'}}$$

or :

D'où $\mathcal{P}_{S(x)} = \frac{1}{2\omega\mu_0 c} P_m^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}\, S(0)$.

Cette quantité est indépendante de x mais fonction de ω

(7)

20. Pour $\omega > 10\,\omega_c$, $\omega^2 > 100\,\omega_c^2$ donc

$\langle \mathcal{S}_t \rangle \simeq \dfrac{1}{2\omega\rho_0 c} P_m^2\,\omega = \dfrac{P_m^2}{2\rho_0 c}$ qui corres-pond à $\langle S_i \rangle$ et $I_t / I_i = 1$: c'est intéressant ! Le pavillon "adapte" les impédances des 2 tuyaux.

21. $T_{pav} = \left(\dfrac{I_t}{I_i}\right)_{pav} = 1$

$T = \left(\dfrac{I_t}{I_i}\right)_{sans\,pav} = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$ cf. Q8.

d'où $T_{pav}/T = \dfrac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} = 2{,}8$ pour $\alpha = 9$;

le gain est d'environ 4,5 dB.

Retour sur Q9.

Le texte donne $Z_{corps,1} \ll Z_{air,2}$: En fait $Z_{corps,1} \gg Z_{air,2}$! Il faut donc inverser les résultats sur (t_p, r_p) et (t_v, r_v) :

$\begin{cases} r_p = -1 \\ t_p = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t_v = 2 \\ r_v = +1. \end{cases}$

(8)

Cela ne change pas les valeurs de R et T, ni la conclusion sur l'absen-ce d'onde transmise.

De même pour la remarque du haut de la page 3.

L'énergie de l'onde transmise est liée à $\vec{R}_{s_t} = p_t \vec{v}_t$

(22) SILENCIEUX

$Z = \rho_0 c$ est le même dans les trois parties

Pour $x \nearrow$ $\underline{v} = \frac{P}{Z}$, pour $x \searrow$ $\underline{v} = -\frac{P}{Z}$

D'où $v(x<0,t) = \frac{1}{Z}\left[P_{i_m} e^{j(\omega t - kx)} - P_{r_m} e^{j(\omega t + kx)}\right]$

$v(0<x<L,t) = \frac{1}{Z}\left[P_m^0 e^{j(\omega t - kx)} - P_m^L e^{j(\omega t + kx)}\right]$

$v(x>L,t) = \frac{1}{Z} P_{t_m} e^{j(\omega t - kx)}$.

(23) On écrit la conservation de D_v et la continuité de P en 0 puis en L.

$$\begin{cases} P_{i_m} + P_{r_m} = P_m^0 + P_m^L \\ P_m^0 e^{-jkL} + P_m^L e^{+jkL} = P_{t_m} e^{-jkL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 (P_{i_m} - P_{r_m}) = (P_m^0 - P_m^L) S_2 \\ S_2 (P_m^0 e^{-jkL} - P_m^L e^{jkL}) = S_1 P_{t_m} e^{-jkL} \end{cases}$$

(24) Le calcul de $\underline{t_P}$ se fait à l'aide de ces 4 équations

on a : $\underline{t_P} = \frac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2 - (S_2-S_1)^2 \exp[-2jkL]}$.

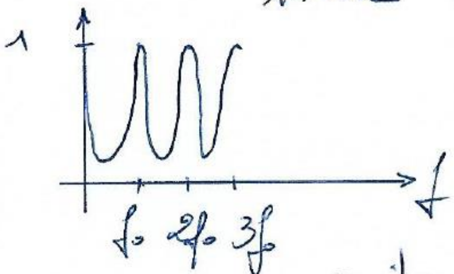
(de faire ---)

$\mathcal{T} = |t_P|^2 = \frac{1}{1 + m\sin^2\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)}$

$f_0 = \frac{c}{2L}$ et $m = \left(\frac{S_2^2 - S_1^2}{2S_1S_2}\right)^2$.

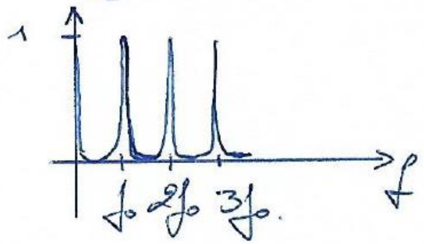
* $\mathcal{T}_{max} = 1$ pour $f_p = p f_0$

$\mathcal{T}_{min} = \frac{1}{1+m}$ pour $f_n = (n+\frac{1}{2}) f_0$.



Cas qcq

Suite p4



Cas $S_2 \gg S_1$

$\mathcal{T}_{min} \to 0$.

* $\mathcal{T}_{max}/2 = \frac{1}{2}$ pour $m\sin^2\left(\frac{\pi f}{f_0}\right) = 1$

Or $m \simeq \left(\frac{S_2}{2S_1}\right)^2$ car $S_2 \gg S_1$.

Soit $\sin\left(\frac{\pi f}{f_0}\right) = \frac{2S_1}{S_2}$ et comme $S_2 \gg S_1$

$\frac{\pi f}{f_0} \simeq \frac{2S_1}{S_2}$ soit $\frac{f}{f_0} = \frac{2S_1}{\pi S_2}$ et $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\pi S_2}{4S_1}$

Comme $S_2 \gg S_1$, $Q \gg 1$

③

(25) La première fréquence qui minimise τ est $f_0/2$ donc $f_{\text{éq}} = \frac{f_0}{2} = \frac{c/2L}{2}$ d'où

$L_{min} = \frac{c}{4 f_{\text{éq}}}$; $L_{min} \simeq 60$ cm, valeur assez conforme à la réalité !

(26) $I_{moteur} = 80$ dB ; $I_{sortie} = 60$ dB

Donc $\tau = \frac{P_{sortie}}{P_{moteur}} = 10^{-2}$

Soit $\frac{1}{1+m} = 10^{-2}$; en résolvant on trouve $S_2 \simeq 20\, S_1$ soit $d_2 \simeq 4{,}5\, d_1$

soit environ 18 cm.

τ_{min}	0,64	0,22	0,06	0,01
m	0,56	3,55	15,7	99
S_2/S_1	2	4	8	20

④

• Plus S_2/S_1 est grand, plus la courbe a des pics fins et marqués pour les $f = pf_0$.

• Il est donc + intéressant de travailler avec des $S_i \neq$, mais le cahier des charges impose que S_2 soit limité...

Pour $R_1 = \frac{1}{2} R_2$ soit $S_2/S_1 = 4$ on a $\tau_{min} = 0{,}22$ ce qui est déjà très intéressant en terme de réduction de bruit. !

Avec $S_2/S_1 = 20$, $\tau_{min} = 1\%$ (cf 26).

R : sur le net je trouve des rapports de ϕ de l'ordre de 2,5, soit $S_2/S_1 \simeq 6$, soit 90% d'atténuation.